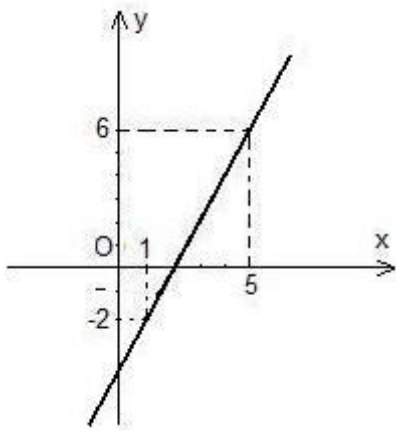


Imaginea unei funcții numerice $f : A \rightarrow B$ reprezintă acea parte din domeniul de valori B alcătuită din toate imaginile prin funcția f ale elementelor lui A .

$$\text{Im } f = f(A) = \{y \in B \mid \exists x \in A \text{ a.i. } f(x) = y\}.$$

Din punct de vedere geometric, imaginea unei funcții este alcătuită din proiecția pe axa Oy a fiecărui punct din A , reprezentat pe axa Ox , prin graficul funcției f . Aceste noțiuni sunt comune oricăror manuale de matematică de liceu.

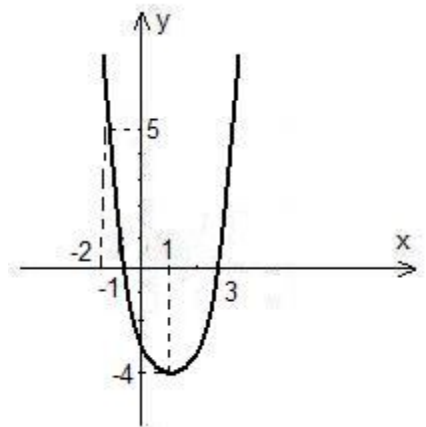
Se poate afla imaginea unei părți din domeniul de definiție, a unei submulțimi a mulțimii A , care va fi alcătuită din puncte din domeniul de valori B , care sunt imagini prin funcția f a respectivelor elemente.



Un exemplu simplu, de funcție de gradul I, pe care elevii o studiază în clasele a VII-a și a IX-a, este următoarea funcție: $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2x - 4$. Am ales două puncte oarecare 1 și 5. Am calculat $f(1) = -2$ și $f(5) = 6$. Imaginea lui 1 prin funcția f este -2, sau valoarea funcției în punctul 1 este 2.

Iar imaginea lui 5 prin funcția f este 6. Oricare alt punct din mulțimea \mathbf{R} are o imagine prin funcția f . Se observă că fiecare punct de pe axa Ox are o imagine prin funcție. Imaginea acestei funcții este mulțimea \mathbf{R} pentru că fiecare punct din domeniul de definiție \mathbf{R} se poate proiecta pe axa Oy prin funcția f . $\text{Im}(f) = \mathbf{R}$

Putem alege o restricție, domeniul $[1,5]$, pentru care să construim imaginea. În acest caz restricționăm și graficul funcției pe acest domeniu. Imaginea acestui interval va fi tot un interval cu capetele în e valorile $f(1) = -2$ și $f(5) = 6$, deoarece funcția este strict crescătoare, după cum se poate observa din grafic. Astfel $\text{Im}([1, 5]) = [-2, 6]$.



Dacă funcția nu este strict monotonă pe întreg domeniul de definiție, se iau în considerare valorile de extrem (de minim sau de maxim) ale funcției.

Iată un exemplu edificator al unei funcții de gradul al II-lea, care se studiază de asemenea în clasa a IX-a, $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Graficul intersectează axa Ox în punctele de abscise -1 și 3, iar vârful, punctul de minim, are coordonatele 1 și -4. Fiecare punct de pe axa Ox se reprezintă pe grafic, apoi se proiectează pe axa Oy până la -4, deci $\text{Im}(f) = [-4, \infty)$. Altfel, putem scrie $x^2 - 2x - 3 = y$, ecuația devine $x^2 - 2x - 3 - y = 0$ și punând condiția ca $x \in \mathbf{R}$ reiese că $\Delta \geq 0$, $(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3 - y) \geq 0$, calculând obținem $y \geq -4$.

Dacă dorim să aflăm imaginea unui interval inclus în domeniul de definiție, trebuie să ne raportăm la grafic. $\text{Im}([-2, \infty)) = [5, \infty)$ pentru că $f(-2) = 5$. Dar $\text{Im}([-2, 3]) = [5, -4]$ pentru că, deși $f(3) = 0$, din intervalul $[-2, 3]$ face parte punctul 1 care corespunde valorii minime a funcției, $f(1) = 3$. Analog $\text{Im}([-1, 3]) = [-4, 0]$. Chiar dacă $f(-1) = f(3) = 0$, ținem cont de punctul de minim 1 care se află în intervalul $[-1, 3]$ al cărui imagine trebuie construită. Aceste imagini ar fi mai greu de intuit de către elevi în absența graficului funcției.

Tot în clasa a IX-a se poate determina imaginea unei funcții raționale, care apoi se poate relua în clasa a XI-a, la studierea graficelor de funcții. Avem, de exemplu, $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,

$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$. La nivelul clasei a IX-a, scriem ecuația $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = y$, egalăm

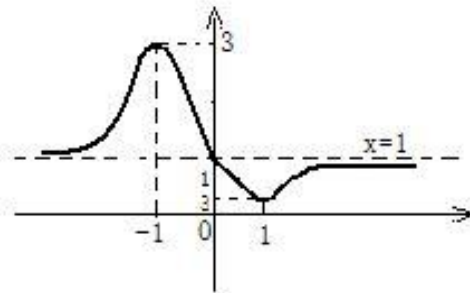
produsul mezilor cu al extremilor, grupăm termenii după x și obținem $x^2(1 - y) + x(-1 - y) + (1 - y) = 0$. Găsim imaginea cu ajutorul definiției care impune ca $x \in \mathbf{R}$ deci $\Delta \geq 0$, $(-1 - y)^2 - 4 \cdot (1 - y) \cdot (1 - y) \geq 0$,

efectuând calculele ajungem la inecuația $-3y^2 + 10y - 3 \geq 0$, realizăm tabelul de semn și obținem soluția $y \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$, deci $\text{Im}(f) = \left[\frac{1}{3}, 3\right]$.

Aceași funcție poate fi reluată în clasa a XI-a, după ce elevii s-au familiarizat cu limitele de funcții, asimptote, derivate și rolul acestora. Astfel, se poate observa că funcția are asimptote orizontale la $\pm\infty$ calculând $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$. Derivata funcției este

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2} \text{ cu soluțiile } x_{1,2} = \pm 1,$$

pentru care valorile extreme ale funcției în aceste puncte sunt $f(-1) = 3$ și $f(1) = \frac{1}{3}$. Construim tabelul de variație și graficul funcției.



x	$-\infty$	-1	1	∞							
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$f(x)$	1	↗	3	↘	$\frac{1}{3}$	↗	1				

Observăm că valorile extreme ale funcției sunt 3 și $\frac{1}{3}$, graficul funcției se proiectează pe axa Oy între aceste valori, deci $\text{Im}(f) = \left[\frac{1}{3}, 3\right]$.